OPCIÓN A

1. a) Discuta por qué valores de **a** el sistema siguientes es compatible: (7 puntos)

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{cases}$$

b) Resuélvalo en el caso (o los casos) en que sea compatible. (3 puntos)

a) Para que sea compatible el rango del determinante de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada son iguales y para que sea determinado su valor debe de ser el mismo que el número de incógnitas.
Por lo tanto el determinante de la matriz ampliada debe de ser nulo porque si no sería mayor que tres

$$|A/B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1+a & 0 & 2 & 1+a^2 \\ 3+a & 0 & 0 & 1+a^2 \\ 6+a & 0 & 2 & 3a+a^2 \end{vmatrix} = (-1) \div \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 1+a^2 \\ 3+a & 0 & 1+a^2 \\ 6+a & 2 & 3a+a^2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 1+a^2 \\ 3+a & 0 & 1+a^2 \\ 5 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-2)\cdot \begin{vmatrix} 3+a & 1+a^2 \\ 5 & 3a-1 \end{vmatrix} = 2\cdot\left[(3+a)\cdot(3a-1)-5\cdot(1+a^2)\right] = 2\cdot\left(9a-3+3a^2-a-5-5a^2\right) =$$

$$= 2\cdot\left(-2a^2+8a-8\right) = (-4)\cdot\left(a^2-4a+4\right) \Rightarrow Si\ |A/B| = 0 \Rightarrow (-4)\cdot\left(a^2-4a+4\right) = 0 \Rightarrow a^2-4a+4=0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{4\pm\sqrt{0}}{2} = 2$$

$$\forall a \in \Re - \{2\} \Rightarrow |A/B| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A/B) = 4 > Número\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow a\ la\ cuarta\ \ fila\ le\ restamos\ la\ suma\ de\ la\ segunda\ y\ tercera$$

$$Si\ a = 2 \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$5x = 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 3\cdot 1 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 2\cdot 1 + 1 + z = 4 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1\ ,1\ ,1)$$

2. Estudiar la posición relativa de las rectas **(6 puntos)**: $r:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-3}{5}=z,\ s:\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\\ z=5\end{cases}$

y, en caso de que se corten, calcular el punto de intersección **(4 puntos)**

Puestas en paramétricas ambas rectas, estableceremos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas al igualar sus coordenadas.
Si el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada es nulo, y sus vectores directores son iguales o proporcionales pueden ser coincidentes en caso de tener algún punto común o paralelos si no lo tienen, de no ser proporcionales las rectas se cortan en un punto.
De no ser el determinante ampliado nulo la rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} r:\begin{cases}x=2-3\lambda\\ y=3+5\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\\ s:\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\\ z=5\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-3\lambda=1-t\\ 3+5\lambda=2t\\ \lambda=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\lambda-t=1\\ 5\lambda-2t=-3\\ \lambda=5\end{cases}\Rightarrow|A/B|=\begin{vmatrix}3&-1&1\\5&-2&-3\\1&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1\\-1&0&-5\\1&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1\\0&0&0\\1&0&5\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(-3\,,5\,,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(-1\,,2\,,0)\end{cases}\Rightarrow\frac{-3}{-1}\neq\frac{5}{2}\Rightarrow Se\ cor\tan\ en\ un\ punto\ P\Rightarrow\lambda=5\Rightarrow P\begin{cases}x=2-3\cdot 5\\ y=3+5\cdot 5\\ z=5\end{cases}\Rightarrow P(-13\,,28\,,5)$$

3. Determinar los valores de **a**, **b** y **c** para que la función f (x) = x^3 + ax^2 + bx + c pase por el punto **(1 , 0)**, tenga un máximo relativo en **x = -1** y un mínimo relativo en **x = 0**. (10 puntos)

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow\begin{cases}f(1)=0\Rightarrow 1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0\Rightarrow a+b+c=-1\\ f'(-1)=0\Rightarrow 3\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+b=0\Rightarrow 3-2a+b=0\Rightarrow 2a-b=3\Rightarrow\\ f'(0)=0\Rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=0\Rightarrow b=0\end{cases}$$

$$2a-0=3\Rightarrow a=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}+0+c=-1\Rightarrow c=-1-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}\Rightarrow f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}$$

$$En\ x\in(-2\,,-1)\Rightarrow-\frac{1}{x^2}>0\Rightarrow\begin{cases}-1<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

4.- Calcula la siguiente integral indefinida $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx$ **(10 puntos)**

$$\frac{2x+5}{(x+3)^3}=\frac{A}{(x+3)^3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{x+3}=\frac{A+B\,(x+3)+C\,(x+3)^2}{(x+3)^3}\Rightarrow A+B\,(x+3)+C\,(x+3)^2=2x+5$$

$$Derivando\Rightarrow B+2C\,(x+3)=2\Rightarrow$$

$$Derivando\Rightarrow 2C=0\Rightarrow C=0$$

$$\begin{cases} x=-3\Rightarrow A+B\,(-3+3)+C\,(-3+3)^2=2\cdot(-3)+5\Rightarrow A=-1 \\ x=-3\Rightarrow B+2C\,(-3+3)=2\Rightarrow B=2 \end{cases}\Rightarrow \frac{2x+5}{(x+3)^3}=\frac{-1}{(x+3)^3}+\frac{2}{(x+3)^2}$$

$$\int\frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx=-\int\frac{dx}{(x+3)^3}+2\int\frac{dx}{(x+3)^2}=-\int\frac{dt}{t^3}+2\int\frac{dt}{t^2}=-\int t^{-3}dt+2\int t^{-2}dt=-\frac{1}{-3+1}t^{-3+1}+\frac{2}{-2+1}t^{-2+1}$$

$$x+3=t\Rightarrow dx=dt$$

$$\int\frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx=\frac{1}{2}t^{-2}-2t^{-1}=\frac{1}{2t^2}-\frac{2}{t}=\frac{1-4t}{2t^2}=\frac{1-4\,(x+3)}{2\,(x+3)^2}=\frac{-4x-11}{2\,(x+3)^2}+K$$

OPCIÓN B

1. a) Demostrar que la ecuación matricial siguiente **AB – A = C** no tiene solución **(6 puntos)**

en donde $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ (indicación: Tomad determinantes)

b) Resolver la ecuación matricial anterior pero con: $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

(4 puntos)

$a)$

$$A(B-I)=C \Rightarrow A(B-I)\cdot(B-I)^{-1}=C\cdot(B-I)^{-1} \Rightarrow AI=C\cdot(B-I)^{-1} \Rightarrow A=C\cdot(B-I)^{-1}$$

Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$B-I=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow |B-I|=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \textit{No existe } (B-I)^{-1}$$

No se puede resolver la ecuación matricial propuesta en el enunciado

$b)$

$$B-I=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow |B-I|=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}==\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\neq 0 \Rightarrow$$

$$\textit{Existe } (B-I)^{-1} \Rightarrow (B-I)^{-1}=\frac{1}{|B-I|}\cdot adj\left[(B-I)^{t}\right] \Rightarrow (B-I)^{t}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow adj\left[(B-I)^{t}\right]=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(B-I)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{3}}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot 3\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A=3\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

2. Encontrar la recta que pasa por el punto **A (1 , 0 , 2)** y es paralela a los planos **x - 2y + 3z + 1 = 0** y **2x - 3y + z + 6 = 0**. **(10 puntos).**

El vector director de la recta **r** buscada es perpendicular a los dos vectores directores de los planos, hallándose como el producto vectorial de dichos vectores.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (1\,,-2\,,3) \\ \overrightarrow{v_2} = (2\,,-3\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} + 4\vec{k} + 9\vec{i} - \vec{j} = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} = (7\,,5\,,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 7\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

3. a) Demostrar que **x = 0** es la única raíz de la ecuación? $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$ **(4 puntos)**
b) Demostrar que **x = 0** es la única raíz de la ecuación **e^x = 1 + x (6 puntos)**

$a)$

$$\left(5x^8 + 3x^4 + 7\right)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x^8 + 3x^4 + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x^8 + 3x^4 + 7 = 0 \Rightarrow x^4 = t \Rightarrow$$

$$5t^2 + 3t + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4\cdot 5\cdot 7 = 9 - 140 = -131 < 0 \Rightarrow Sin\ solucion\ en\ \Re$$

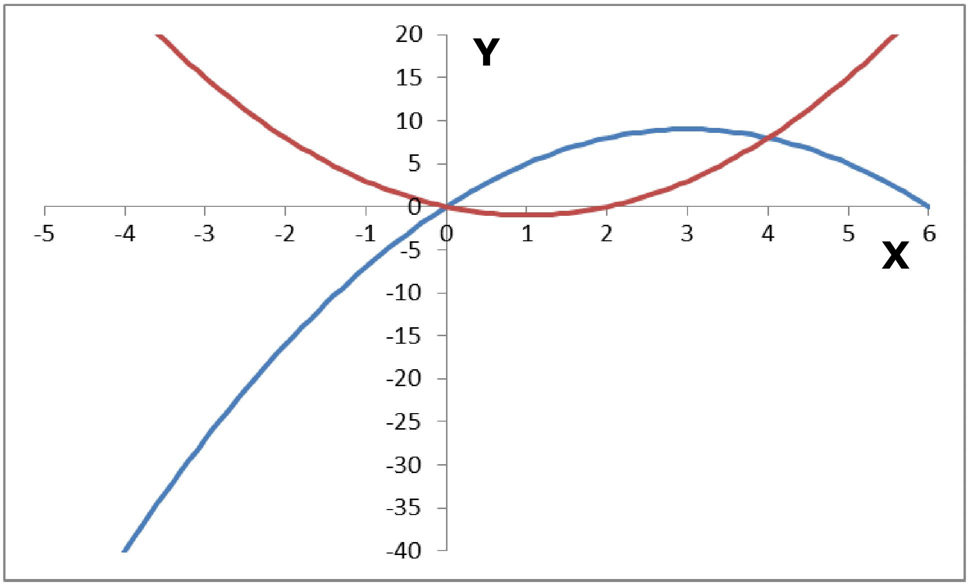
$b)$

$$Sea\ g(x) = e^x - 1 - x \Rightarrow g'(x) = e^x - 1 \Rightarrow Creciente \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow x > 0$$

$$La\ \ función\ es \begin{cases} Creciente \Rightarrow x > 0 \\ Creciente \Rightarrow x < 0 \end{cases} \Rightarrow Entonces\ solo\ \ puede\ tener\ un\ valor\ en\ que\ g(0) = 0\ y\ \ por\ ello$$

$$e^x - 1 - x = 0 \Rightarrow e^x = 1 + x\ se\ cor\tan\ en\ x = 0\ que\ es\ su\ raiz$$

4. Haga un dibujo aproximado de las curvas **y = 6x - x²** e **y = x² - 2x**, e indique los puntos donde se cortan. (4 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las dos curvas anteriores (6 puntos).



$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} 6x-x^2=0 \Rightarrow (6-x)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 6-x=0 \Rightarrow x=6 \end{cases} \\ x^2-2x=0 \Rightarrow (x-2)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow 6x-x^2=x^2-2x \Rightarrow 2x^2-8x=0 \Rightarrow 2x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

$$A=\int_0^2 \left(6x-x^2\right)dx+\left|\int_0^2 \left(x^2-2x\right)dx\right|+\int_2^4 \left(6x-x^2\right)dx-\int_0^2 \left(x^2-2x\right)dx=$$

$$A=\int_0^4 \left(6x-x^2\right)dx-\int_0^2 \left(x^2-2x\right)dx-\int_0^2 \left(x^2-2x\right)dx=\int_0^4 \left(6x-x^2\right)dx-\int_0^4 \left(x^2-2x\right)dx=\int_0^4 \left(8x-2x^2\right)dx$$

$$A=\int_0^4 \left(8x-2x^2\right)dx=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^4-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^4=4\cdot\left(4^2-0^2\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(4^3-0^3\right)=64-\frac{2}{3}\cdot 64=\frac{64}{3}\,u^2$$